ЛЕКЦИЯ 1.
КИНЕМАТИКА

1. Введение. Элементы кинематики.

Механика– часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Механика Галилея – Ньютона называется *классической механикой*.

В классической механике изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме (v<< c).

Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света с, изучаются *релятивистской механикой*, основанной на специальной теории относительности, сформированной А.Эйнштейном (1879-1955).

Движение микроскопических тел со скоростями много меньшими скорости света описывается *квантовой механикой*.

Область физики, изучающая движение микроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, называется *релятивистской квантовой механикой*, построение которой не завершено и в настоящее время.

В классической механике общепринята концепция пространства и времени, разработанная Исааком Ньютоном и господствующая на протяжении 17-19 в которой пространство и время рассматриваются как объективные формы существования материи, но в отрыве друг от друга и от движения материальных тел. Дальнейшие исследования показали ограниченность таких представлений.

Изучение механики начнем с классической механики, которая делится на три раздела:

Кинематика - изучает движение тел, не рассматривая причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика изучает законы равновесия системы тел.

Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия, поэтому законы статики отдельно от законов динамики в вузовском курсе физики не рассматриваются.

1.1 Основные понятия кинематики.

Наиболее простым видом движения является движение материальной точки.

Материальная точка это тело, обладающее массой, размерами и формой которого в данной задаче можно пренебречь.

Изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению движения системы материальных точек.

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между любыми точками которого не меняется со временем.

Абсолютно твердое тело, с которым связывают ту или иную систему координат, условно считают неподвижным и относительно которого исследуют движение других тел, называется *телом отсчета.* Движется тело или покоится, определяется только телом отсчета, по отношению к которому рассматривается это движение.

Совокупность системы координат, жестко связанной с телом отсчета, часов для отсчета времени и указание начала отсчета времени называется *системой отсчета*

В декартовой системе координат положение точки А в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами *x, y, z* или радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала системы координат в данную точку.

При *координатном способе* описания движения координаты точки задаются как функция времени *x* = *x(t); y* = *y(t); z* = *z(t)* – они называются кинематическими уравнениями движения материальной точки в скалярной форме. Чтобы получить уравнение траектории из этих уравнений необходимо исключить время.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется числом степеней свободы.

Векторный способ описания движения основан на том, что положение точки в пространстве указывается радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Если начало отсчета связать с системой координат и ввести единичные векторы (орты) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ то для любого момента времени радиус вектор можно выразить через его компоненты $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, т.к. $\vec{r}$ - функция времени, то и *x, y, z* –функции времени. Таким образом, от векторного способа задания движения можно перейти к координатному способу.

1.2 Перемещение

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории. Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении А. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведенный из начального положения движущейся точки в ее положение в данный момент (приращение радиус-вектора за рассматриваемый промежуток времени) называется *перемещением* (см. рис. 1.1)

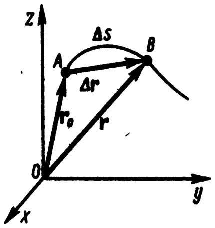

Рис. 1.1

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \qquad (1.1)$$

Модуль вектора перемещения

$$AB = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \qquad (1.2)$$

Линия, которую описывает материальная точка, перемещаясь в пространстве, называется *траекторией*

В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

При траекторном способе описания движения фиксируется положение точки в начальный момент времени, затем траектория разбивается на такие малые участки, чтобы каждый из них можно было заменить прямолинейным перемещением $\Delta\vec{r}$. Перемещения, направленные от начальной точки считаются положительными, а направленные к ней – отрицательными.

Алгебраическая сумма перемещений, совершенных точкой к данному моменту времени, называется расстоянием. Расстояние является скалярной функцией времени.

Сумма абсолютных величин перемещений, совершенных точкой к данному моменту времени называется *длиной пути* S.

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}| = dS$.

1.3 Скорость

Скорость - является векторной величиной, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Средняя скорость перемещения - это векторная величина, определяемая равенством $<\vec{\upsilon}> = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$. При неограниченном уменьшении Δt (при этом точка А стремится к точке В), средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется *мгновенной скоростью* или скоростью в данной точке:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.3)$$

Вектор мгновенной скорости для каждого момента времени направлен по касательной к траектории в сторону движения, т.е.

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau} \qquad (1.4)$$

где $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной.

По мере уменьшения Δt путь ΔS все больше приближается к $|\Delta\vec{r}|$, поэтому модуль мгновенной скорости

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \qquad (1.5)$$

Вектор скорости можно разложить на составляющие по координатным осям:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_X\vec{i} + \upsilon_Y\vec{j} + \upsilon_Z\vec{k} \qquad (1.6)$$

С другой стороны, подставляя в формулу (1.6) выражение (1.5), получим:

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (1.7)$$

Из сравнения (1.6) и (1.7) следует, что

$$\upsilon_X = \frac{dx}{dt}; \upsilon_Y = \frac{dy}{dt}; \upsilon_Z = \frac{dz}{dt} \qquad (1.8)$$

При координатном способе задания движения модуль мгновенной скорости равен:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (1.9)$$

Средней путевой скоростью $< \upsilon_S >$ называется скалярная величина, равная отношению пути ΔS к тому промежутку времени, за которое этот путь пройден

$$< \upsilon_S > = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (1.10)$$

Т.к. $|\Delta\vec{r}| \le \Delta S$, то $|< \vec{\upsilon} >| \le |< \upsilon_S >|$.

Если при движении точки модуль ее скорости не изменяется, то движение называется равномерным.

Скорость результирующего движения $\vec{\upsilon}$ материальной точки, участвующей одновременно в нескольких движениях, определяется как геометрическая сумма всех векторов скоростей $\vec{\upsilon}_i$ отдельных движений, в которых участвует материальная точка: $\vec{\upsilon} = \sum \vec{\upsilon}_i$.

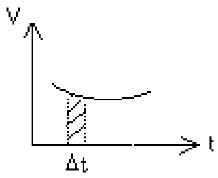

Рисунок 1.2

Если выражение $dS = \upsilon dt$ проинтегрировать в пределах от t до $t + dt$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время dt:

$$S = \int_{t}^{t+dt} \upsilon\, dt \qquad (1.11)$$

В случае равномерного движения $\upsilon = const$ и $S = \upsilon \int_{t}^{t+\Delta t} dt = \upsilon \Delta t$.

В общем случае

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t) dt.$$

По графику скорости можно найти путь, пройденный телом: он численно равен площади фигуры заключенной между кривой зависимости $\upsilon - t$ и осями координат (рис. 1.2).

1.4 Ускорение

Ускорение- это физическая величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости.

Пусть при движении материальной точки из положения А в положение В, в течение промежутка времени от t до $t + \Delta t$, её скорость изменяется от значения $\vec{\upsilon}$ до $\vec{\upsilon}_1$ (Рис. 1.3). Вектор изменения скорости $\Delta \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}$.

Средним ускорением $< \vec{a} >$ за время Δt, называется вектор, численно равный отношению изменения вектора скорости $\Delta \vec{\upsilon}$ к промежутку времени, за которое это изменение произошло:

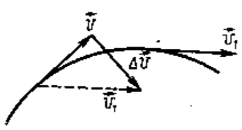

Рис. 1.3

$$< \vec{a} > = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} \qquad (1.12)$$

Направление $< \vec{a} >$ совпадает с направлением $\Delta \vec{\upsilon}$.

Мгновенным ускорением $\vec{a}$ называют векторную величину, численно равную пределу, к которому стремится среднее ускорение за промежуток времени Δt, при $\Delta t \to 0$.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} < \vec{a} > = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad (1.13)$$

Используя соотношение (1.12), получим:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1.14)$$

Согласно уравнению (1.14) вектор мгновенного ускорения равен первой производной от вектора скорости по времени или второй производной от вектора перемещения по времени. Подставляя в формулу (1.14) выражение (1.7), получим формулу ускорения в координатной форме:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (1.15)$$

где $\frac{d^2x}{dt^2} = a_X$, $\frac{d^2y}{dt^2} = a_Y$, $\frac{d^2z}{dt^2} = a_Z$ - компоненты вектора ускорения в декартовой системе координат. Модуль вектора ускорения в этом случае определяется по формуле:

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \qquad (1.16)$$

Так как, вектор скорости характеризуется величиной и направлением, то вектор ускорения должен характеризовать быстроту изменения скорости как по величине, так и по направлению.

В общем случае произвольного криволинейного движения вектор скорости $\vec{\upsilon}$ может изменяться и по величине (модулю) и по направлению. Вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ можно разложить на две составляющие, одна из которых, $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$, характеризует быстроту изменения скорости только по величине, другая $\Delta\vec{\upsilon}_n$ – быстроту изменения скорости только по направлению. Тогда *тангенциальная составляющая ускорения* запишется в виде следующего уравнения:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\upsilon_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad (1.17)$$

Направление вектора $\vec{a}_\tau$ совпадает с направлением касательной к траектории: $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$. (Следует обратить внимание: полное ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ и тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ две разные физические величины).

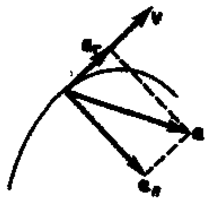

Рис. 1.4

Нормальная составляющая вектора $\Delta\vec{\upsilon}$, $\Delta\vec{\upsilon}_n$, характеризует изменение скорости за время Δ t по направлению. Она направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют также центростремительным ускорением).

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}$$

Соотношение для a_n справедливо не только для плоского движения, но и для любого движения, только вместо радиуса окружности r надо подставлять радиус кривизны траектории.

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих ускорения (рис. 1.4).

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \qquad (1.2)$$

Код поля изменен

Модуль ускорения можно определить по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{\upsilon^2}{r} + \left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2} \qquad (1.19)$$

При равномерном движении по окружности тангенциальное ускорение отсутствует. Полное ускорение равно нормальному ускорению и направлено по радиусу окружности к ее центру. Поэтому нормальное ускорение часто называют центростремительным.

1.5 Кинематика твердого тела

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений.

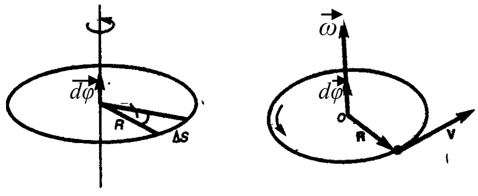

Рис. 1.5

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Средняя угловая скорость $<\omega>$ это величина, равная отношению угла поворота тела $\Delta\varphi$ к тому промежутку времени, за которое этот поворот произошел:

$$<\omega> = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (1.20)$$

Мгновенная угловая скорость или просто угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ -}$$

псевдовекторная величина. Направление вектора $\vec{\omega}$ находится по правилу буравчика (правилу правого винта). Если поворачивать винт с правой нарезкой в сторону движения точки по окружности, то поступательное движение винта будет направлено в направлении вектора $\vec{\omega}$, (рис. 1.5).

Единица измерения угловой скорости рад/с, размерность $[\vec{\omega}] = T^{-1}$;

Линейная скорость точки $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega$, т.о. выражение связывающие линейную скорость с угловой скоростью будет иметь следующий вид

$$\upsilon = \omega R \qquad (1.21)$$

В векторной форме

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\vec{R}] \qquad (1.22)$$

Модуль линейной скорости

$$|\vec{\upsilon}| = \omega R \sin(\vec{\omega}\vec{R}).$$

Если ω = *const*, то вращение равномерное и его можно характеризовать *периодом* вращения *T* – временем, за которое точка совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π.

$$\omega = 2\pi/T,$$

Таким образом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1.3)$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при его равномерном движении по окружности в единицу времени называется *частотой вращения*.

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \qquad \omega = 2\pi n; \qquad (1.4)$$

Среднее угловое ускорение это физическая величина, численно равная отношению изменения угловой скорости к тому промежутку времени, за которое это изменение произошло:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (1.22)$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.23)$$

Мгновенное угловое ускорение или просто *угловое ускорение* является первой производной угловой скорости по времени.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.24)$$

При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$, а при замедленном – противоположен ему (рис.1.6).

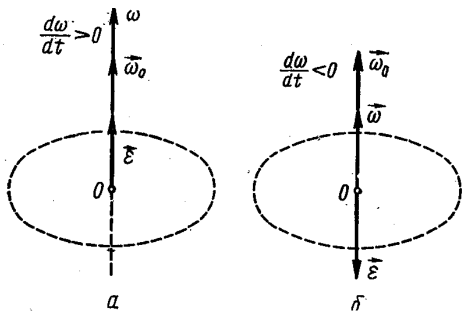

Рис. 1.6

Так как. тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \text{ а } \upsilon = \omega R, \text{ то:}$$

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \qquad (1.25)$$

Нормальная составляющая ускорения (рис. 1.7) выражается следующей формулой

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R \qquad (1.26)$$

Связь между линейными и угловыми величинами выражается следующими формулами:

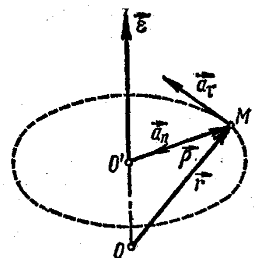

Рис. 1.7

S= Rφ;υ = Rω; (1.27)

$a_\tau = R\varepsilon;$
$a_n = \omega^2 R.$

В случае равнопеременного движения точки по окружности (ε = const),

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t \qquad (1.5)$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon \frac{t^2}{2} \qquad (1.6)$$

При совпадении направления векторов угловой скорости и углового ускорения используется знак плюс, при противоположном направлении – знак минус.